Théorème 1

Soit $\mathscr{G}$ un graphe ($M \in \mathscr{M}(\mathbb{N})$ sa matrice d'adjacence) et $p \in \mathbb{N}^*$. On note M^p sa puissance $\text{p}^{\text{ième}}$ et m_{ij}^p son coefficient i,j. m_{ij}^p représente alors le nombre de chaînes de longueur p entre les sommets s_i et s_j.

Démonstration : Soit H_p l'hypothèse de récurrence le coefficient m_{ij}^p représente le nombre de chaînes de longueur p entre les sommets s_i et s_j.

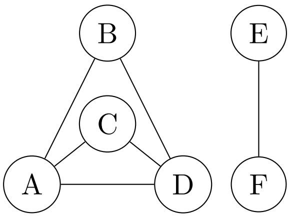
◇ H_1 est vérifiée par définition de M

◇ Supposons H_p vérifiée, Toute chaîne de longueur $p+1$ entre s_i et s_j est composée par la succession d'une chaîne de longueur p entre s_i et s_k et d'une arête entre s_k et s_j si elles existent.
Par hypothèse de récurrence, le nombre de chaînes de longueur p reliant s_i à s_k est donné par m_{ik}^p. Puisque m_{kj} vaut 1 si l'arête (s_k,s_j) existe, 0 sinon, le nombre de chaînes de longueur $p+1$ reliant s_i à s_j est donné par $\displaystyle\sum_k m_{ik}^p \times m_{kj}$.

Or par définition du produit matriciel, $\displaystyle\sum_k m_{ik}^p m_{kj} = m_{ij}^{p+1}$ où $\left(m_{ij}^{p+1}\right)_{ij} = M^{p+1}$.

Ainsi H_{p+1} est également vérifiée.

◇ Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, H_p est vérifiée. □

Exo 1 : 

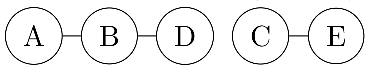
Il y a deux composantes connexes : $\{A,B,C,D\}$ et $\{E,F\}$.

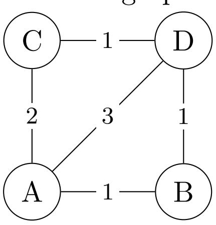
Exo 2 : $\mathscr{S} = \{A,D,E,F,V,Z\}$, $\mathscr{A} = \{(A,D),(A,E),(D,E),(F,V),(V,Z)\}$. Ce graphe possède deux composantes connexes : $\{A,D,E\}$ et $\{F,V,Z\}$.

Exo 3 : $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exo 4 : Le graphe est d'ordre 5, ainsi on calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On voit que le sommet A est connectable avec A, B et D mais jamais avec C et E. On voit que C est connecté avec E. Il existe donc deux composantes connexes : $\{A,B,D\}$ et $\{C,E\}$.

Graphiquement le graphe est celui-ci : 

Exo 5 : 

et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exo 6 : $\mathscr{S} = \{A,B,C,D,E\}$, $\mathscr{A} = \{(A,B,1),(A,C,2),(B,C,5),(C,D,6),(D,E,2)\}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

expl :

A	B	C	D	E	F	$\mathscr{S}'$	$\mathscr{P}$
(A,0)	∞	∞	∞	∞	∞	$\{B,C,D,E,F\}$	$\left(\binom{A}{0},\infty,\infty,\infty,\infty,\infty\right)$
$\vert$	(A,1)	(A,4)	∞	∞	∞	$\{C,D,E,F\}$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{A}{4},\infty,\infty,\infty\right)$
$\vert$	$\vert$	(B,3)	∞	(B,4)	∞	$\{D,E,F\}$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{B}{3},\infty,\binom{B}{4},\infty\right)$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	(C,9)	(B,4)	∞	$\{D,F\}$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{B}{3},\binom{C}{9},\binom{B}{4},\infty\right)$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	(E,6)	$\vert$	(E,9)	$\{F\}$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{B}{3},\binom{E}{6},\binom{B}{4},\binom{E}{9}\right)$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	(E,9)	$\emptyset$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{B}{3},\binom{E}{6},\binom{B}{4},\binom{E}{9}\right)$

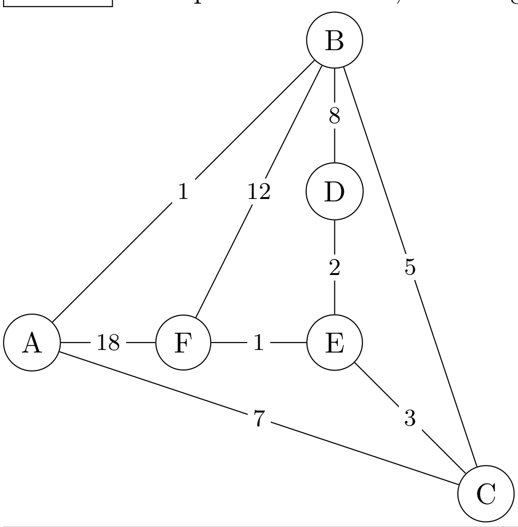
La chaîne de poids minimal est F-E-B-A et pèse 9.

Exo 7 :

A	B	C	D	E	$\mathscr{S}'$	$\mathscr{P}$
∞	(B,0)	∞	∞	∞	$\{A,C,D,E\}$	$\left(\infty,\binom{B}{0},\infty,\infty,\infty\right)$
(B,1)	$\vert$	(B,5)	∞	∞	$\{C,D,E\}$	$\left(\binom{B}{1},\binom{B}{0},\infty,\infty,\infty\right)$
$\vert$	$\vert$	(A,3)	∞	∞	$\{D,E\}$	$\left(\binom{B}{1},\binom{B}{0},\binom{A}{3},\infty,\infty\right)$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	(C,9)	∞	$\{E\}$	$\left(\binom{B}{1},\binom{B}{0},\binom{A}{3},\binom{C}{9},\infty\right)$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	(D,11)	$\emptyset$	$\left(\binom{B}{1},\binom{B}{0},\binom{A}{3},\binom{C}{9},\binom{D}{11}\right)$

La chaîne de poids minimal est D-C-A-B et elle pèse 9.

Exo 8 : Pour plus de lisibilité, voici le graphe correspondant



et sa matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 5 & 8 & 0 & 12 \\ 7 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 18 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

A	B	C	D	E	F	$\mathscr{S}'$	$\mathscr{P}$
(A,0)	∞	∞	∞	∞	∞	$\{B,C,D,E,F\}$	$\left(\binom{A}{0},\infty,\infty,\infty,\infty,\infty\right)$
$\vert$	(A,1)	(A,7)	∞	∞	(A,18)	$\{C,D,E,F\}$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{A}{7},\infty,\infty,\binom{A}{18}\right)$
$\vert$	$\vert$	(B,6)	(B,9)	∞	(B,13)	$\{D,E,F\}$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{B}{6},\binom{B}{9},\infty,\binom{B}{13}\right)$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	(B,9)	(C,9)	(B,13)	$\{E,F\}$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{B}{6},\binom{B}{9},\binom{C}{9},\binom{B}{13}\right)$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	(C,9)	(E,10)	$\{F\}$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{B}{6},\binom{B}{9},\binom{C}{9},\binom{E}{10}\right)$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	(E,10)	$\emptyset$	$\left(\binom{A}{0},\binom{A}{1},\binom{B}{6},\binom{B}{9},\binom{C}{9},\binom{E}{10}\right)$

La chaîne de poids minimal est F-E-C-B-A et elle pèse 10.

Implémentation sous python

Exo 9 :

1.

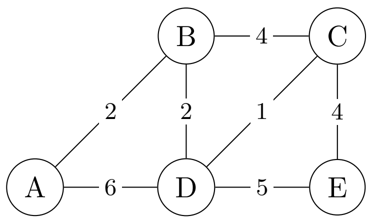
```
S=[0,1,2,3,4,5,6]
A=[(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,5),(5,6)]
```

2. `lectureGraphe()` est en $\mathcal{O}(n)$ où n est le nombre de lignes du fichier.
3. Si l'on suppose que la `np.zeros((n,n))` ne coûte rien, `matriceAdjacence(S,A)` est en $\mathcal{O}(a)$ où a est le nombre d'arêtes du graphe.
   Sinon `matriceAdjacence(S,A)` est en $\mathcal{O}(n^2)$ où n est le nombre de sommets.
4. `existeArete(i,j,M)` est en $\mathcal{O}(1)$.
5. `existeChaine(i,j,M)` est en $\mathcal{O}(n^2)$ où n est le nombre de sommets.
6. `grapheConnexe(M)` est en $\mathcal{O}(n^3)$ où n est le nombre de sommets.

Pour le code `python`, *cf.* fichier `CPGE-Info-Graphe-TP-exo09-corrige.py`

$\boxed{\text{Exo 10 :}}$

1.



et $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

2.

A	B	C	D	E	$\mathscr{S}'$	$\mathscr{P}$
(A,0)	∞	∞	∞	∞	$\{B,C,D,E\}$	$(\binom{A}{0},\infty,\infty,\infty,\infty)$
|	(A,2)	∞	(A,6)	∞	$\{C,D,E\}$	$(\binom{A}{0},\binom{A}{2},\infty,\binom{A}{6},\infty)$
|	|	(B,6)	(B,4)	∞	$\{C,E\}$	$(\binom{A}{0},\binom{A}{2},\binom{B}{6},\binom{B}{4},\infty)$
|	|	(D,5)	|	(D,9)	$\{E\}$	$(\binom{A}{0},\binom{B}{6},\binom{D}{5},\binom{B}{4},\binom{D}{9})$
|	|	|	|	(D,9)	$\emptyset$	$(\binom{A}{0},\binom{B}{6},\binom{D}{5},\binom{B}{4},\binom{D}{9})$

Il y a deux chaînes de poids minimal, à savoir E-D-B-A ou E-C-D-B-A, et elles pèsent 9.

3.

```
S=[0,1,2,3,4]
A=[[(1,2),(3,6)],[(2,4),(3,2)],[(3,1),(4,4)],[(4,5)]]
```


4.-9. *cf.* fichier `CPGE-Info-Graphe-TP-exo10-corrige.py`

10. ◇ `nombreSommets(L)` est en $\mathcal{O}(a)$ où a est le nombre d'arêtes.
    ◇ `convertList2Matrice(L)` est en $\mathcal{O}(a)$ où a est le nombre d'arêtes.
    ◇ Comme à l'exo9, si l'on suppose que la `np.zeros((n,n))` ne coûte rien, `matriceAdjacenceP(S,A)` est en $\mathcal{O}(a)$ où a est le nombre d'arêtes du graphe.
    Sinon `matriceAdjacenceP(S,A)` est en $\mathcal{O}(n^2)$ où n est le nombre de sommets.

$\boxed{\text{Exo 11 :}}$

1.-6. *cf.* fichier `CPGE-Info-Graphe-TP-exo11-corrige.py`

7.(a) ◇ Berlin-Paris correspond à l'arête 3-17, comme `L[3]=[(24, 7), (18, 4), (17, 11), (0, 7)]`. Il faut 11h pour relier Berlin à Paris.
◇ Bucarest-Kiev correspond à l'arête 6-10, comme `L[6]=[(10, 12)]` il faut 12h.
◇ Bruxelles-Sarajevo correspond à l'arête 5-20. `L[5]=[(17, 6), (13, 5)]` ne nous aide pas mais `L[20]=[(6, 13), (24, 8)]` permet de conclure qu'il faut 13h.

(b) Le graphe n'est pas connexe : Stockholm, Copenhague, Budapest, Sofia, Belgrade et Zagreb forment un sous-graphe indépendant du reste.

(c) Lisbonne-Prague (11-18) : 28h en passant par Paris (chaîne 18-17-11).
Athènes-Oslo (1-16) : 43h en passant par Berlin, Vienne et Sarajevo (chaîne 16-3-24-20-1).