

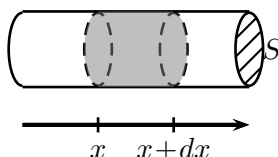
En première année, vous avez vu comment résoudre des Équations Différentielles Ordinaires (une seule variable, EDO) avec python et le module Scipy. Nous allons aborder la résolution d'Équations aux Dérivées Partielles (plusieurs variables, EDP) en implémentant les schémas numériques le permettant, bien que des solutions toutes faites existent (notamment Fipy [<http://www.ctcms.nist.gov/fipy/>]).

De nombreuses méthodes de résolutions existent, néanmoins dans le cadre de ce cours, on se limitera à une résolution par différences finies. Cette méthode consiste à calculer en de nombreux points du domaine d'étude (le maillage), une valeur approchée de la grandeur étudiée. Cette valeur approchée est calculée grâce à une discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (le schéma).

On se cantonnera à un maillage régulier et au schéma d'Euler explicite centré.

I Équation de la chaleur 1D

On considère un cylindre homogène de section S , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c et de masse volumique μ .



En considérant que la conduction se fait uniquement selon l'axe (Ox), un bilan thermique durant une durée dt sur une portion dx du cylindre permet d'écrire l'équation différentielle vérifiée par la grandeur température T dépendante du temps et de l'espace :

$$T : (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, x) \mapsto T(t, x)$$

À savoir
$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad (1), \quad \text{où } \alpha = \frac{\lambda}{\mu c} \text{ est la diffusivité thermique.}$$

À cela s'ajoutent des conditions initiales $T(0, x)$ et des conditions aux limites $T(t, 0)$ et $T(t, L)$. Ce qui donne le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(0, x) \text{ connu} \\ T(t, 0) = T_0 \text{ et } T(t, L) = T_L \end{cases}$$

1 Résolution exacte

On suppose que l'on peut séparer les variables et que nous sommes dans des conditions de Dirichlet (conditions aux bords) nulles *i.e.* $\begin{cases} T(t, x) = f(x)g(t) \\ \forall t, T(t, 0) = T(t, L) = 0 \end{cases}$

- Q-1 :** Montrer que le rapport $\frac{f''}{f}$ est constant (on posera égal à $-k$) et que $\forall t, g'(t) = g_0 e^{-\alpha k t}$.
- Q-2 :** À l'aide des conditions de Dirichlet, mq si $k \leq 0$ alors $\forall x, f(x) = 0$
- Q-3 :** De même, mq si $k > 0$ alors les seules solutions non identiquement nulles existent s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tq $\sqrt{k} = \frac{j\pi}{L}$ et auquel cas $f(x) = f_0^j \times \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$.
- Q-4 :** En conclure que $T(x, t)$ est de la forme : $T(t, x) = \sum_{j>0} T_j e^{-(\frac{j\pi}{L})^2 \alpha t} \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$

Par la suite, on suppose qu'il existe une solution non identiquement nulle. On suppose également que $T : (t, x) \mapsto T(t, x)$ est \mathcal{C}^2 selon t et \mathcal{C}^4 selon x .

2 Schéma d'Euler explicite centré

Dans la plupart des cas, on ne sait pas résoudre une EDP. On va chercher à calculer des valeurs de T sur une grille $t \times x$ (on effectue un maillage). On cherche donc à discrétiser l'équation de la chaleur (1) en chacun des nœuds du maillage.

On rappelle que si $f \in \mathcal{C}^3$, le développement de Taylor-Young en x permet d'écrire :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

Q-5 : préciser le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 selon t de $T(t + dt, x)$ et en déduire la différence finie de $\frac{\partial T}{\partial t}(t, x)$.

...

Q-6 : préciser les développements de Taylor-Young à l'ordre 3 selon x de :

$$T(t, x + dx) = \dots$$

$$T(t, x - dx) = \dots$$

Q-7 : En déduire la différence finie $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x)$

...

Q-8 : Dans l'équation de la chaleur, remplacer les dérivées partielles par les différences finies calculées et montrer qu'elle devient $\frac{1}{dt}(T(t + dt, x) - T(t, x)) = \frac{\alpha}{dx^2}(T(t, x + dx) - 2T(t, x) + T(t, x - dx)) + \mathcal{O}(dt, dx^2)$.

...

Q-9 : En évaluant en chaque point de la grille (Δt et Δx seront les pas de discrétisation), on aura avec $\forall n \leq N$ et $i \leq M$, $T_i^n = T(t_0 + n\Delta t, x_0 + i\Delta x)$ la relation aux différences finies suivante :

$$(2) \quad \dots$$

Enfin en notant \tilde{T} la solution numérique (l'approximation de la solution T) du de la relation aux différences finies (2), on a finalement :

$$\forall n, i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \times \llbracket 1, M-1 \rrbracket, \quad \tilde{T}_i^{n+1} - \tilde{T}_i^n = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (\tilde{T}_{i+1}^n - 2\tilde{T}_i^n + \tilde{T}_{i-1}^n) \quad (3)$$

Ce schéma est un schéma d'Euler explicite centré.

Par souci de simplification des notations, on ne notera pas la tilde sur la solution numérique lorsque le contexte permet de lever le doute. On note de manière plus condensé ce schéma, $S_{\Delta t, \Delta x}(T)_i^n = 0$.

Comme on vient de le voir, il y a deux caractérisations pour ce schéma, une temporelle et une spatiale.

◇ temporelle : ce schéma est explicite puisque les valeurs de T au temps $n+1$ [*i.e.* $(T_i^{n+1})_i$] s'expriment facilement en fonction des valeurs au temps n [*i.e.* $(T_i^n)_i$]. À l'inverse, on parlerait de schéma implicite.

◇ spatiale : ce schéma est centré puisque T est exprimé selon les indices $i + 1$ et $i - 1$.

Rq : on pourrait avoir un schéma décentré à droite avec T_i, T_{i+1} ou à gauche avec T_{i-1}, T_i .

3 Écriture matricielle

On peut écrire matriciellement le schéma avec les conditions de Dirichlet (limites à valeur constante).

Q-10 : En notant $\beta = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$, le schéma obtenu devient pour $(n, i) \in \llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, M \rrbracket$:

$$\begin{aligned} T_0^{n+1} &= T_0 \\ T_1^{n+1} &= T_1^n + \beta(T_2^n - 2T_1^n + T_0^n) \\ T_2^{n+1} &= T_2^n + \beta(T_3^n - 2T_2^n + T_1^n) \\ &\vdots \\ T_M^{n+1} &= T_M^n \end{aligned}$$

On définit $\mathbf{T}^n = (T_0^n, T_1^n, \dots, T_M^n)$, déterminer alors une relation matricielle entre \mathbf{T}^{n+1} et \mathbf{T}^n .

...

4 Consistance et ordre

On définit l'erreur de consistance e_n par $e_n = \max_i |T_i^{n+1} - \tilde{T}_i^{n+1}|$ lorsque \tilde{T}_i^{n+1} a été définie à partir des valeurs exactes $(T_i^n)_i$. C'est une erreur locale (un seul pas de calcul a été fait).

Rq : l'erreur de consistance dépend de la norme choisie.

Définition 1

Un schéma S est dit consistant si la somme des erreurs de consistance tendent vers 0 lorsque Δx tend vers 0, *i.e.* si $\sum_{n=1}^N e_n \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$

L'ordre d'un schéma permet alors de quantifier la précision globale que l'on peut atteindre.

Définition 2

Un schéma est dit d'ordre p en temps si $\forall n < N, \exists C, \max_i |\tilde{T}_i^n - T_i^n| < C \Delta t^p$,
i.e. $\max_i |\tilde{T}_i^n - T_i^n| = \mathcal{O}(\Delta t^p)$.

En pratique, la puissance des approximations donne l'ordre du schéma.

Q-11 : Ici, le schéma est consistant d'ordre en temps et en espace.

5 Stabilité et convergence

Définition 3

Un schéma est stable si pour deux suites solutions (\tilde{T}_i^n) et (\bar{T}_i^n) qui diffèrent initialement d'un epsilon, leur différence reste contrôlable.

i.e. $\exists K \in \mathbb{R}, \max_{n < N} |\tilde{T}_i^n - \bar{T}_i^n| < K \cdot \varepsilon$

Dans notre cas, on trouve que le schéma est stable si $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$

Démonstration : En utilisant la notation matricielle, $\|\mathbf{T}^n\|_\infty \leq \|\mathbf{T}^0\|_\infty \cdot \|M\|_\infty^n$. Or $\|M\|_\infty = \max_i \sum_j |m_{ij}| = 2|\beta| + |1 - 2\beta|$. Pour que la différence reste contrôlable, il faut que $\|M\|_\infty \leq 1$. Cela implique $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$. Par définition, $\beta > 0$. Si $\beta > \frac{1}{2}$, on trouve un vecteur propre $\vec{vp} = \left((-1)^i \sin\left(\frac{i\pi}{M}\right) \right)_i$ possédant une valeur propre de valeur absolue strictement supérieure à 1 $[vp = 1 - 4\beta \cos^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)]$. Le schéma est alors bien instable. □

Définition 4

Un schéma est convergent si la différence entre une solution exacte T et la solution approchée \tilde{T} tend vers 0 lorsque $\tilde{T}_i^0 \rightarrow T_i^0$ et $\Delta x \rightarrow 0$, *i.e.* $\forall i, \tilde{T}_i^0 \rightarrow T_i^0$ et $\max_{n < N} |T_i^n - \tilde{T}_i^n| \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$

Théorème 1 (de Lax, admis)

Si un schéma est consistant, il y a alors équivalence entre stabilité et convergence du schéma.

En pratique, on utilise l'implication suivante : consistance+stabilité \Rightarrow convergence.

Q-12 : Que conclure du schéma d'Euler explicite centré ? [rappel : $T_i^{n+1} - T_i^n = \beta(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$]
 ...

rq : le schéma d'Euler implicite centré, défini par $T_i^{n+1} - T_i^n = \beta(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1})$ est consistant et inconditionnellement stable.

6 Implémentation

Dans chacun des cas implémentés, on considère deux barres de même longueur et de diffusivité thermiques respectives α et α_2 en contact, la longueur totale des barres $L = 1$. Aux extrémités extérieures des barres, on impose des conditions de Dirichlet nulles ($T_0 = T_L = 0$).

Étudions les deux cas suivants :

- ◊ Condi° A : une seule barre (*i.e.* les diffusivités thermiques sont les mêmes) initialement à 50°C. Nb : on pourra prendre 51 points de discrétisation spatiale.
- ◊ Condi° B : une barre est initialement à 25°C tandis que l'autre à 50°C. Nb : on pourra prendre $\alpha = 1$ et $\alpha_2 = 0,1$.

Q-13 : Implémenter le schéma d'Euler explicite centré sous python. Si vous le souhaitez, vous pouvez vous aider du code fourni dans le fichier `CPGE-Info-EDP-TP-Chaleur1D-eleve.py`.

Q-14 : Tester le schéma sous les conditions A.

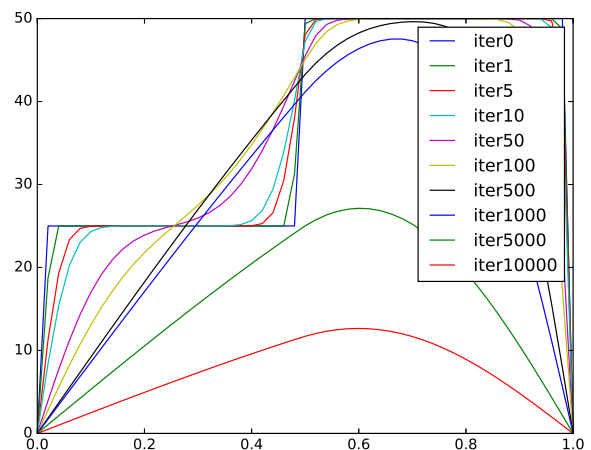
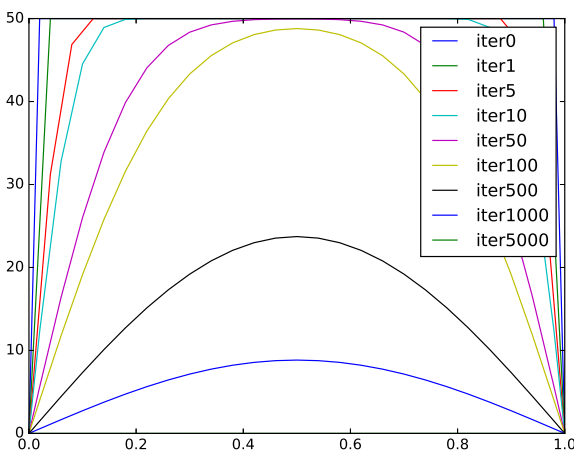
Sauvegarder l'image obtenue dans un fichier au format `NOM-Prenom-EDP-Chaleur1D-ConditionsA.png`.

Q-15 : Vérifier qu'en changeant les valeurs de NbL , NbD ou α , le schéma devient tantôt stable, tantôt instable. Sauvegarder une image d'instabilité.

Retrouvons-nous la limite $\beta = \frac{1}{2}$? (*e.g.* pour $NbL=51$, $NbD=10001$, $\alpha = 2,0025$ vous commencerez à voir une instabilité)

Q-16 : Tester d'autres conditions et sauvegarder les images obtenues.

Avec $NbL = 51$, $\alpha = 1$ (puis sous les condi° B $\alpha_2 = 0,1$), vous devriez obtenir les images suivantes :



i Amélioration

Numpy permet de faire des opérations vectorielles compilées plutôt qu'interprétées. Ces méthodes permettent un gain de temps considérable.

Par exemple, au lieu d'écrire

```

1 for i in range(NbL):
2     T[i] = T0
3 for j in range(1:NbL-1):
4     T[j] = T[j-1]+T[j]+T[j+1]
```

vous pouvez utiliser le slicing et les opérations vectorielles proposées par numpy

```

1 T[:] = T0
2 T[1:-1]=T[:-2]+T[1:-1]+T[2:]
```

Pour rappel,

$T[:-1]$ permet d'obtenir tous les éléments du tableau jusqu'à l'avant-dernier.

$T[1:-2:3]$ permet d'obtenir les éléments du tableau du 2^e jusqu'à l'anté-pénultième de 3 en 3.

Pour un aperçu en image, cf. [https://dl.afpy.org/pycon-fr-09/python_scientifique/numpy.html].

Q-17 : En utilisant les opérations vectorielles permises par numpy, comparer les temps de calcul entre une solution de code interprété et une de code compilé.

→ Préciser le facteur de gain de temps pour les conditions A ou B.

II Équation de la chaleur 2D

On considère cette fois une plaque (de dimensions $L_x \times L_y$) dans laquelle la conduction se fait selon 2 axes. L'équation de la chaleur est alors $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T$ où Δ est l'opérateur Laplacien $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

On cherche cette fois-ci le régime stationnaire *i.e.* $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ avec des conditions de Dirichlet (bords gauche, droit, bas, haut).

Le problème est alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\ T(0,y) = T_g \text{ et } T(L_x,y) = T_d \\ T(x,0) = T_b \text{ et } T(x,L_y) = T_h \end{cases}$$

Lors de cette résolution, on utilisera une discrétisation centrée.

1 Schéma d'Euler centré

Q-18 : De la même manière que lors de l'étude de l'équation de la chaleur 1D, montrer que l'on obtient :

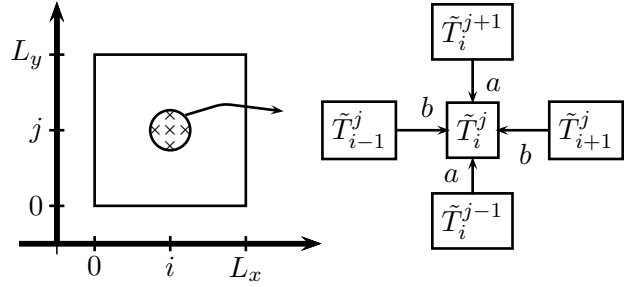
$$\tilde{T}_i^j = b(\tilde{T}_{i+1}^j + \tilde{T}_{i-1}^j) + a(\tilde{T}_i^{j+1} + \tilde{T}_i^{j-1})$$

et préciser (a,b) .

...

Explication graphique du schéma

$$\tilde{T}_i^j = b(\tilde{T}_{i+1}^j + \tilde{T}_{i-1}^j) + a(\tilde{T}_i^{j+1} + \tilde{T}_i^{j-1})$$



On comprend l'influence de Δx et Δy sur le schéma. Plus le pas Δx est petit (*i.e.* plus a est petit), plus l'influence des points à gauche et à droite est grande par rapport aux points en bas et en haut.

Q-19 : Lorsque $\Delta x = \Delta y$, retrouver que $a = b = \frac{1}{4}$.

...

2 Résolution par itération

Nous avons alors affaire à $Nx \times Ny$ équations pour autant d'inconnues (!). Il est possible mais coûteux de résoudre ce système, on préférera donc une méthode itérative.

Pour ce faire, on temporalise notre discrétisation et on implémentera le schéma modifié suivant :

$$\tilde{T}_i^j(t_k) = b(\tilde{T}_{i+1}^j(t_{k-1}) + \tilde{T}_{i-1}^j(t_{k-1})) + a(\tilde{T}_i^{j+1}(t_{k-1}) + \tilde{T}_i^{j-1}(t_{k-1}))$$

et on estimera que l'état stationnaire est atteint une fois que la différence entre deux valeurs successives ne dépasse plus un epsilon choisi, *i.e.* $\max_{i,j} |\tilde{T}_i^j(t_k) - \tilde{T}_i^j(t_{k-1})| < \epsilon$.

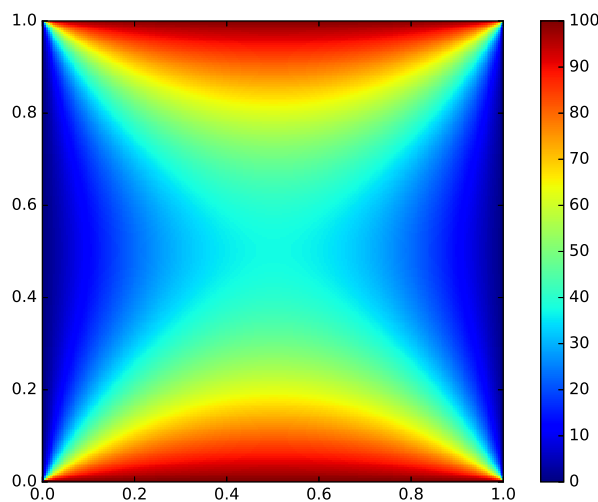
3 Implémentation

On admet que le schéma est convergent.

Q-20 : Implémenter ce schéma itératif modifié sous python. SI vous le souhaitez, vous pouvez vous aider du code fourni dans le fichier CPGE-Info-EDP-TP-Chaleur2D-eleve.py.

Q-21 : Avec $Tb = 100$, $Tg = 50$ et $Th = Td = 0$, sauvegarder les images obtenues pour $\epsilon \in (0,1; 0,01; 0,001)$. Que pouvez-vous dire ?

Avec $Tb = Th = 100$, $Tg = Td = 0$ et $\epsilon = 10^{-3}$, vous devriez obtenir l'image suivante :



i Amélioration

Q-22 : En utilisant les opérations vectorielles permises par numpy, comparer les temps de calcul entre une solution de code interprété et une de code compilé.

→ Préciser le facteur du gain de temps.