Q-1 : $\dfrac{\partial T}{\partial t}=\alpha\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Longleftrightarrow\dfrac{\partial f(x)g(t)}{\partial t}=\alpha\dfrac{\partial^2 f(x)g(t)}{\partial x^2}\Longleftrightarrow f(x)g'(t)=\alpha f''(x)g(t)\Longleftrightarrow\dfrac{g'(t)}{\alpha g(t)}=\dfrac{f''(x)}{f(x)}$

Ceci étant vrai quelque soit x et quelque soit t, on a $\frac{f''}{f}=\frac{g'}{\alpha g}=cste=-k$

On résout alors l'équation différentielle $g'+kg=0$, et on trouve avec $g_0=g(0)$,

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ g'(t)=g_0e^{-\alpha kt}$$

Q-2 : *f vérifie l'équation différentielle $f''+kf=0$ dont l'équation associée est $X^2+k=0$ de discriminant $\Delta=-4k$.*

si $k<0$ alors $f(x)=Ae^{\sqrt{|k|}x}+Be^{-\sqrt{|k|}x}$, puisque $f(0)=f(L)=0$, on a $f(x)=0$.

si $k=0$ alors $f(x)=Ax+B$, puisque $f(0)=f(L)=0$, on a $f(x)=0$.

Dans les deux cas,

$$\forall x\in[0;L],\ f(x)=0$$

Q-3 : *si $k>0$ alors $f(x)=Acos(\sqrt{k}x)+Bsin(\sqrt{k}x)$.*

Puisque $f(0)=0$, on a $A=0$. Puisque $f(L)=0$, on a $B=0$ ou l'existence de $j\in\mathbb{N}$ tq $\sqrt{k}=\frac{j\pi}{L}$.

Ainsi

$$f(x)=f_0^j sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$$

où f_0^j est une constante possiblement nulle.

Q-4 : *par linéarité de l'équation différentielle, f est de la forme*

$$f(x)=\sum_{j>0}f_0^j sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$$

Enfin,

$$\forall(x,t)\in[0;L]\times\mathbb{R}_+,\ T(t,x)=g(t)\times f(x)=g_0e^{-\alpha kx}\times\sum_{j>0}f_0^j sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)=\sum T_je^{-\alpha kt}sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$$

rq : on remarque que le seul cas où T est non-identiquement nul est le cas où $k>0$ et dû au terme $e^{-\alpha kt}$ la température tend vers 0 en un temps infini.

Q-5 : *Le développement de Taylor à l'ordre 2 selon t permet d'écrire :*

$$T(t+dt,x)=T(t,x)+dt\frac{\partial T}{\partial t}(t,x)+\frac{(dt)^2}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(t,x)+o(dt^2)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t}(t,x)&=\frac{1}{dt}(T(t+dt,x)-T(t,x))-\frac{dt}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(t,x)+o(dt)\\&=\frac{1}{dt}(T(t+dt,x)-T(t,x))+\mathcal{O}(dt)\end{aligned}$$

Q-6 : *Le développement de Taylor à l'ordre 4 selon x permet d'écrire :*

$$T(t,x+dx)=T(t,x)+dx\frac{\partial T}{\partial x}(t,x)+\sum_{i=2}^{4}\frac{(dx)^i}{i!}\frac{\partial^i T}{\partial x^i}(t,x)+o(dx^4)$$
$$T(t,x-dx)=T(t,x)-dx\frac{\partial T}{\partial x}(t,x)+\sum_{i=2}^{4}\frac{(-dx)^i}{i!}\frac{\partial^i T}{\partial x^i}(t,x)+o(dx^4)$$

Q-7 : *En sommant, on trouve :*

$$T(t,x+dx)+T(t,x-dx)=2T(t,x)+2\frac{(dx)^2}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x)+2\frac{(dx)^4}{4!}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(t,x)+o(dx^4)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x)&=\frac{1}{dx^2}\left(T(t,x+dx)-2T(t,x)+T(t,x-dx)\right)-\frac{dx^2}{12}\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(t,x)+o(dx^2)\\&=\frac{1}{dx^2}\left(T(t,x+dx)-2T(t,x)+T(t,x-dx)\right)+\mathcal{O}(dx^2)\end{aligned}$$

Q-8 : *En remplaçant les dérivées partielles par les différences finies calculées, l'équation de la chaleur devient :*

$$\frac{1}{dt}\left(T(t+dt,x)-T(t,x)\right)=\frac{\alpha}{dx^2}\left(T(t,x+dx)-2T(t,x)+T(t,x-dx)\right)+\mathcal{O}(dt,dx^2)$$

Q-9 : *En évaluant en chaque point de la grille (Δt et Δx seront les pas de discrétisation), on aura avec $\forall n \leqslant N$ et $i \leqslant M$, $T_i^n = T(t_0+n\Delta t, x_0+i\Delta x)$ la relation aux différences finies suivante :*

$$(2)\qquad T_i^{n+1}-T_i^n=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n\right)+\mathcal{O}(\Delta t,\Delta x^2)$$

Enfin en notant $\tilde{T}$ la solution numérique (l'approximation de la solution T) du schéma (2), on a finalement :

$$(3)\qquad \forall n,i\in [\![0,N-1]\!]\times[\![1,M-1]\!],\ \tilde{T}_i^{n+1}-\tilde{T}_i^n=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(\tilde{T}_{i+1}^n-2\tilde{T}_i^n+\tilde{T}_{i-1}^n\right)$$

Ce schéma est un schéma d'Euler explicite centré.

Q-10 : *En posant $\mathbb{T}^n = \begin{pmatrix} T_0^n \\ T_1^n \\ \vdots \\ T_M^n \end{pmatrix}$ ($\mathbb{T}^0$ est connu) et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & 1-2\beta & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & 1-2\beta & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient la suite définie par $\mathbb{T}^{n+1} = M.\mathbb{T}^n$*

Q-11 : *Ici, le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Le schéma est donc consistant.*

Q-12 : *Puisque le schéma d'Euler explicite centré est consistant et stable pour $\beta \leqslant \frac{1}{2}$, le théorème de Lax nous assure que le schéma est convergent pour $\beta \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.*

Q-13-17 : *cf. fichier `CPGE-Info-EDP-TP-Chaleur1D-corrige.py`.*

Q-18 : *De la même manière que lors de l'étude de l'équation de la chaleur 1D, on trouve :*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)=\frac{1}{dx^2}\left(T(x+dx,y)-2T(x,y)+T(x-dx,y)\right)+\mathcal{O}(dx^2)$$

Ainsi, en posant $T_i^j = T(x_0+i\Delta x, y_0+j\Delta y)$, on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t,x)\approx\frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{i+1}^j-2T_i^j+T_{i-1}^j\right)$$

En faisant de même pour la dérivée selon y, le schéma devient alors :

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\tilde{T}_{i+1}^j-2\tilde{T}_i^j+\tilde{T}_{i-1}^j\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(\tilde{T}_i^{j+1}-2\tilde{T}_i^j+\tilde{T}_i^{j-1}\right)=0$$

Ainsi

$$\Delta y^2(\tilde{T}_{i+1}^j+\tilde{T}_{i-1}^j)+\Delta x^2(\tilde{T}_i^{j+1}+\tilde{T}_i^{j-1})=2(\Delta x^2+\Delta y^2)\tilde{T}_i^j$$

et donc

$$\tilde{T}_i^j=\frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2+\Delta y^2)}\left(\tilde{T}_{i+1}^j+\tilde{T}_{i-1}^j\right)+\frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2+\Delta y^2)}\left(\tilde{T}_i^{j+1}+\tilde{T}_i^{j-1}\right)$$

Au final, en posant $a=\dfrac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2+\Delta y^2)}$ et $b=\dfrac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2+\Delta y^2)}$, on a $\boxed{\tilde{T}_i^j=b\left(\tilde{T}_{i+1}^j+\tilde{T}_{i-1}^j\right)+a\left(\tilde{T}_i^{j+1}+\tilde{T}_i^{j-1}\right)}$.

Q-19 : *lorsque $\Delta x=\Delta y$, on a bien $a=b=\frac{1}{4}$.*

Q-20-22 : *cf. fichier `CPGE-Info-EDP-TP-Chaleur2D-corrige.py`.*